



TITLE:

トカマクを意識したMHD系の数値解析について (応用科学における偏微分方程式の応用解析)

AUTHOR(S):

牛島, 照夫; 中村, 正彰

CITATION:

牛島, 照夫 ...[et al]. トカマクを意識したMHD系の数値解析について (応用科学における偏微分方程式の応用解析). 数理解析研究所講究録 1980, 386: 143-160

ISSUE DATE:

1980-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104883>

RIGHT:

トカマクを意識した M H D 系の数値解析について

電気通信大学情報数理工学科

牛島照夫

中村正彰

はじめに

近年大型トカマク装置によるプラズマ閉じ込めの研究が進展し、トカマク方式による核融合発電がそう遠くない将来に可能になるということである。この装置の設計時に、又実験結果の解析のために、多量の数値計算が行なわれている。その際の基礎方程式としては、磁気流体系 (Magneto-hydrodynamic system, M H D 系) が適していると言われている。

本稿では、変形体と電磁場の基礎方程式から磁気流体系を導びく過程を素描し、装置の形状に対応する対称性をもつ領域での静止平衡解がみたす Grad-Shafranov 方程式を導出する。この方程式の非線形項を処理するために Grad によって導入された一般化微分方程式を紹介する。静止平衡解の近くでの線形化安定性を記述していると考えられる二階線形発展系を導びく。これは、ヒルベルト空間における発展方程式とみなせることに注意する。

本稿の大筋は、Bernstein et al. [1], Grad et al. [2], Grad [3], 宮本健郎[5], Van Kampen et al. [12] によっているが、プラズマ物理に暗い筆者達の読み違いがあ

るのではないかと懸念している。

この話題を展望できるようになるまでに幾多の教えをいただいた竹田辰興、常松俊秀両博士（日本原子力研究所）に深く感謝する。

1. 磁気流体系

出発点とする変形体と電磁場の基礎方程式を列挙してみよう。

質量保存則：

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v = 0, \quad \left(\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (v, \nabla) \right).$$

運動量保存則：

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \operatorname{div} \sigma + f.$$

エネルギー保存則：

$$\rho \frac{De}{Dt} = (\sigma, \epsilon) + \rho w - \operatorname{div} q, \quad \epsilon = \epsilon(v) = \left(\frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) \right).$$

Maxwell 方程式：

$$\frac{\partial D}{\partial t} + J = \operatorname{rot} H, \quad \operatorname{div} D = \rho_e,$$

$$D = \epsilon E,$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = - \operatorname{rot} E, \quad \operatorname{div} B = 0,$$

$$B = \mu H.$$

ここで ρ は質量密度、 e は内部エネルギー、 w は、エネルギーのわき出しをあらわすスカラー量であり、 v は速度、 f は外力、 q は熱流をしめすベクトル量であり σ は応力テンソル、 ϵ は変形速度テンソルである。 Maxwell 方程式においては、 D は電気変位、 J は電流密度、 H は磁場強度、 B は磁気誘導、 E は電場を

あらわすベクトル量であり、 ρ_e は電荷密度、 ϵ は誘電率、 μ は透磁率をしめすスカラー量である。

完全導体の容器内にあるプラズマの状態をこれらの方程式系を簡易化した磁気流体系 (MHD 系) によって記述する。

容器の内部を Ω 、容器壁を Γ とし、プラズマ領域を Ω_p 、プラズマ境界を Γ_p とする。真空領域を Ω_v として、

$$\Omega \cup \Gamma = \Omega_p \cup \Gamma_p \cup \Omega_v \cup \Gamma$$

とおく。図1は、トカマク型プラズマ閉じこめの概念図である。

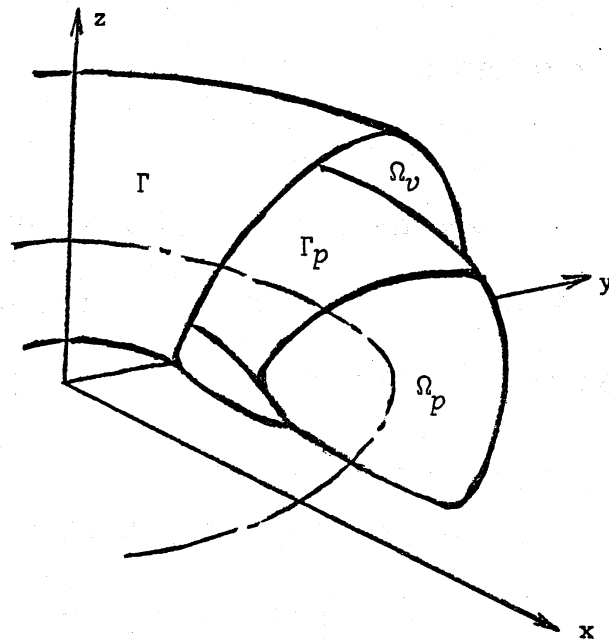


図1 トカマク型プラズマ閉じこめの概念図

1.1 断熱条件下での MHD 系.

プラズマ領域 Ω_p で、

$$(1) \quad \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{v} ,$$

$$(2) \quad \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} ,$$

$$(3) \quad \frac{D}{Dt} (p\rho^{-\gamma}) = 0 ,$$

$$(4) \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{E} ,$$

$$(5) \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 ,$$

$$(6) \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} ,$$

$$(7) \quad J = \sigma (E + v \times B) .$$

新たに加わった量 p 、 γ 、 μ_0 、 σ は、それぞれ、圧力、比熱比、真空の透磁率、電気伝導率である。ここでは、M K S 系電磁単位を採用する。各式に対して若干の解説をする。

(1) は、質量保存則である。

(2) は、運動量保存則において、応力テンソルがスカラー量 p から導びけることを要請し、さらに外力を $f = J \times B$ としたものである。プラズマがニュートン流体であるとすれば、応力テンソルは

$$\sigma = \frac{1}{2} \mu \epsilon(v) + \lambda \operatorname{div} v - p$$

のように粘性を含んでいるはずであるが、スケールアナリシスによって粘性項は無視してしまう。外力 f は重力加速度ベクトルを g として、

$$f = \rho_e E + J \times B + \rho g$$

の形をとるが、電場と重力場による力は無視している。

(3) の断熱条件は、エネルギー保存則の代替物と考えられる。

(4), (5), (6) は、Maxwell 方程式において $\frac{\partial D}{\partial t} = 0$, $\mu \equiv \mu_0$ (定数) として得られる。この近似は、 D の時間変化が、M H D 系を支配する時間変化より非常におそいことからなされる。すなわち D の特徴的な周波数が、M H D の特徴的な周波数よりもはるかに小さいとき正当であると物理的には解釈される。

(7) は、構成法則として採用されるオームの法則である。

真空領域 Ω_v では、

$$(8) \quad \rho = 0, \quad v = 0, \quad p = 0, \quad J = 0, \quad \text{div } B = 0,$$

$$(9) \quad \frac{\partial B}{\partial t} = -\text{rot } E,$$

$$(10) \quad \text{rot } B = 0,$$

を要請する。

境界 Γ では、その単位法線ベクトル n に対して

$$(11) \quad n \times E = 0,$$

すなわち、電場の接平面成分がないことを要請する。

境界 Γ_p では、その単位法線ベクトル n に対して

$$(12) \quad (B, n) = 0,$$

$$(13) \quad n \times (E_p - E_v) = (v, n) (B_p - B_v),$$

$$(14) \quad p_p + \frac{(B_p, B_p)}{2\mu_0} = p_v + \frac{(B_v, B_v)}{2\mu_0}.$$

(12) は、 Γ_p が磁気面であることを意味する。すなわち、あるスカラー関数 Ψ が

あって、

$$(\nabla \Psi, B) = 0, \quad \Psi = \text{const on } \Gamma_p.$$

(13) は、プラズマに固定した座標系でみた電場の接平面成分が連続であることと同じ、

すなわち、

$$(E_p + v \times B_p)_t = (E_v + v \times B_v)_t$$

ここで、添字 p, v はそれぞれ、プラズマ 真空からの境界値を意味している。

(14) は、全圧力の連続性の要請である。

1.2 理想 MHD 系

(7) で $\sigma = \infty$ としたことに対応する条件:

$$(7') \quad E + v \times B = 0$$

を (7) の代りに要請した系 (1) ~ (6), (7') を理想 MHD 系という。この系において、(6) と (7') を使って E と J を消去すると、

$$(1) \quad \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \operatorname{div} v ,$$

$$(2') \quad \rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} B \times B ,$$

$$(3) \quad \frac{D}{Dt} (\rho p^{-\gamma}) = 0 ,$$

$$(4') \quad \frac{\partial B}{\partial t} = \operatorname{rot} (v \times B) ,$$

$$(5) \quad \operatorname{div} B = 0 .$$

となる。以下 (1), (2'), (3), (4'), (5) を Ω_p での方程式と考える。この方程式系においては未知数は、 $\rho, v_x, v_y, v_z, p, B_x, B_y, B_z$ の計 8 個であり、方程式の数は、 $1 + 3 + 1 + 3 + 1 = 8 + 1$ 個である。しかし、 $t = 0$ で $\operatorname{div} B = 0$ ならば、 $\operatorname{div} \operatorname{rot} E = 0$ より、すべての $t > 0$ で $\operatorname{div} B = 0$ と考えられるから、形式的に未知数の数と方程式の数が一致する発展系が得られたことになる。

2. 静止平衡解

速度 v が 0 で、時間依存しない理想 MHD 系の解

$$(\rho, v = 0, p, J, B)$$

を静止平衡解とよぶ。 (p, J, B) がみたすべき関係式は、プラズマ領域 Ω_p で、

(2), (5), (6) より

$$(2). \quad \nabla p = J \times B ,$$

$$(5) \quad \operatorname{div} B = 0 ,$$

$$(6) \quad \operatorname{rot} B = \mu_0 J ,$$

真空領域 Ω_V で、(8),(10) より、

$$(8)_0. \quad p = 0 ,$$

$$(8)_{00}. \quad \operatorname{div} B = 0 ,$$

$$(10)_0. \quad \operatorname{rot} B = 0 ,$$

境界 Γ_p で、(12),(14) より、

$$(12) \quad (B, n) = 0 ,$$

$$(14) \quad p + \frac{B_p^2}{2\mu_0} = \frac{B_v^2}{2\mu_0} ,$$

である。条件 (7') より、 $E = 0$ in Ω_p であるが、さらに強く

$$(15) \quad E = 0 \text{ in } \Omega ,$$

を要請すると、条件 (13) はみたされている。プラズマは完全導体 ($\sigma = \infty$) として

いるから、電流 J が 0 でなくとも $E = 0$ と矛盾しないと考えられる。

2.1 Grad-Shafranov 方程式

いわゆるトロイダル対称な静止平衡解を求めよう。円柱座標系 (r, θ, z)

$(0 < r < \infty, 0 \leq \theta < 2\pi, -\infty < z < \infty)$ を固定し、 θ 依存性をもたない：

$$(16) \quad \frac{\partial B}{\partial \theta} = 0$$

ものとして、磁束密度 B を定めることが、この場合の問題である。 r - z 平面内の領

域 ω_p が存在して、

$$\Omega_p = \{r = (r, \theta, z) : (r, z) \in \omega_p, 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

と書けるとしよう。

(5)と(16)より(局所的には)一価の関数 $\psi = \psi(r, z)$ と $T = T(r, z)$ が存在して

$$(17) \quad B = (B_r, B_\theta, B_z) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \frac{T}{r}, -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)$$

となる。これから

$$\begin{aligned} \text{rot } B &= \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial z}, \mathcal{L}\psi, \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right), \\ J \times B &= \left(-\frac{1}{r} \left(\frac{1}{\mu_0} \mathcal{L}\psi \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} T \right), \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right), \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial z} T - \frac{1}{\mu_0} \mathcal{L}\psi \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right). \end{aligned}$$

ここで

$$(18) \quad \mathcal{L}\psi = \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right\} \psi.$$

(16)より $(J \times B)_\theta = 0$ だから $\nabla T \parallel \nabla \psi$ となり、 T は ψ の関数:

$$(19) \quad T = T(\psi),$$

である。(2)。によって、 $\nabla p = \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{1}{r} \mathcal{L}\psi - \frac{1}{2r^2} \frac{dT^2}{d\psi} \right) \nabla \psi$ であるから、

p も ψ の関数:

$$(20) \quad p = p(\psi),$$

である。 $\nabla p = \frac{dp}{d\psi} \nabla \psi$ であるから、(2)。は、

$$(21)_p \quad \mathcal{L}\psi = r\mu_0 \frac{dp}{d\psi} + \frac{1}{2r} \frac{dT^2}{d\psi} \quad \text{in } \Omega_p$$

に帰着される。この $(21)_p$ を、Grad-Shafranov 方程式とよぶ。

(8)。。, (10)。より、

$$(21)_V \quad \mathcal{L}\psi = 0 \quad \text{in } \Omega_V.$$

境界 Γ_p では、(12), (14) に対応して、接続条件

$$(22) \quad \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = 0 ,$$

$$(23) \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_p = \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_v$$

を要請する。(17) と (22) から (12) がみたされる。(17) と (23) のもとで

(14) がみたされるためには、

$$(24) \quad p + \frac{T^2}{2\mu_0 r^2} = 0 \quad \text{on } \Gamma_p ,$$

がみたされる必要がある。

境界 Γ も磁気面であるという要請から (22) が Γ でも成立することを要請する。

条件 (22) は、 ψ が Γ と Γ_p の連結成分の上でそれぞれ定数であることを意味し、 ψ が Ω 全体で一価にとれることを保証する。

かくして我々は、次の自由境界問題に到達する。

$$(25) \quad \begin{cases} -\Delta \psi = \left(\gamma \mu_0 \frac{dP}{d\psi} + \frac{1}{r} T \frac{dT}{d\psi} \right) Y(\psi) & \text{in } \Omega, \\ \psi = \gamma < 0 & \text{on } \Gamma, \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_p = \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_v & \text{on } \Gamma_p . \end{cases}$$

ここで、 $Y(\psi)$ は、ヘヴィサイド関数 ($Y(\psi) = 1$ for $\psi \geq 0$, $Y(\psi) = 0$ for $\psi < 0$) である。プラズマ領域 Ω_p は、

$$(26) \quad \Omega_p = \{(r, \theta, z) : \psi(r, z) > 0\}$$

であり、 Γ_p は Ω_p の境界である。

2.2 Grad-Shafranov 方程式の非線形性

直交座標系 (x, y, z) を固定して z 依存性をもたない静止平衡解を求める場合には、

Grad-Shafranov 方程式は、

$$(27) \quad -\Delta\psi = \mu_0 \frac{dp}{d\psi} + T \frac{dT}{d\psi}$$

となる。 プラズマ領域 Ω_p は、 (x,y) 平面内の領域 ω_p に対して、

$$(28) \quad \Omega_p = \omega_p \times (0,L), \quad 0 < L < \infty$$

と表わせるものとする。 簡単のために、

$$(29) \quad T = 0$$

としたときの、非線形性 p の与え方として実行されている方法を3種のべる。

その1は、 $p(\psi)$ を ψ の初等関数などの既知の形で与えることであり、このとき、Grad-Shafranov 方程式は、半線形だ円型問題である。 変分的取りあつかいは、Temam [8], [9] にあり、それにもとづく数値的手法の解析もなされている (Sermange [7])。 仲里-菊地 [4] では、 $p(\psi) = \frac{\lambda}{2} \psi^2$ の場合の解の径路の構成法が述べられている。

他の非線形性の与え方を述べるために、解 ψ の等 Ψ 面の囲む体積 $V(\Psi)$ を導入する：

$$(30) \quad V(\Psi) = \int_{\psi(\mathbf{r}) > \Psi} d\mathbf{r}, \quad d\mathbf{r} = dx dy dz.$$

$V(\Psi)$ は、 Ψ に関する単調減少関数だから、逆関数 $\Psi(V)$ が $0 \leq V \leq V(0)$ で存在する。 $V(0)$ は、 Ω_p の体積である。

第2の非線形性のとりあつかいは、

$$(31) \quad \frac{dp}{d\Psi} = f(V), \quad V = V(\psi(\mathbf{r}))$$

と与える方法である。 Mossino [6] には、仮似変分不等式による取りあつかいが述べられている。

第3のとりあつかいは、Grad による一般化微分方程式によるものである。 この例題の場合は、断熱条件に対応して

$$(32) \quad p(\Psi) = \alpha(V) \left(\frac{d\Psi}{dV} \right)^{-\gamma}$$

の形で与える。

2.3 一般化微分方程式

(32) の $\alpha(V)$ が正定数 α である場合には、(27) - (29) は

$$(33) \quad -\Delta\psi = 2\mu_0\alpha \frac{d^2\Psi}{dV^2}$$

となる。磁気面平均と呼ばれる操作 $\langle f \rangle$:

$$(34) \quad \langle f \rangle(V) = \int_{v(\mathbf{r})=V} \frac{f}{|\nabla v|} d\mathbf{r},$$

を導入する。ここで、 $v(\mathbf{r}) = V(\psi(\mathbf{r}))$ である。このとき、

$\Psi(V) = \psi(\mathbf{r})|_{v(\mathbf{r})=V}$ は、次の常微分方程式 (35) をみたす。

$$(35) \quad -\frac{d}{dV} \left(K(V) \frac{d\Psi}{dV} \right) = 2\mu_0\alpha \frac{d^2\Psi}{dV^2}, \quad 0 < V < V(0).$$

ここで、 $K(V) = \langle |\nabla v|^2 \rangle$ である。

境界条件として、 Ψ は、

$$(36) \quad \Psi(0) = \psi_{\max}, \quad \Psi(V(0)) = 0$$

をみたしている。

この例題を一般化した定式化として、二階だ円型微分方程式の自由境界問題に到達す

る。第一著者の報告書 [10] の概当箇所を参照していただきたい。

(33) と (35) を交互に使う逐次的な数値解の構成法が得られる (Grad [3]) .

3. 線形化 MHD 方程式

プラズマ領域 Ω_p での静止平衡解

$$\rho_0, v_0 = 0, p_0, J_0, B_0$$

の近くでの摂動解、

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon \rho_1, v = \varepsilon v_1, p = p_0 + \varepsilon p_1,$$

$$J = J_0 + \varepsilon J_1, B = B_0 + \varepsilon B_1$$

を方程式系 (1) ~ (7) に代入して ε の係数 = 0 とおくことによって $t = t$ での

プラズマ領域 $\Omega_p(t)$ でたつ次の系を得る。

$$(1)_1 \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0 v_1) = 0,$$

$$(2)_1 \quad \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + J_0 \times B_1 + J_1 \times B_0,$$

$$(3)_1 \quad \frac{\partial p_1}{\partial t} + (v_1, \nabla) p_0 + \gamma p_0 \operatorname{div} v_1 = 0,$$

$$(4)_1 \quad \frac{\partial B_1}{\partial t} = \operatorname{rot}(v_1 \times B_0),$$

$$(5)_1 \quad \operatorname{div} B_1 = 0.$$

Lagrange 変位 ξ に対する線形化方程式を導びく。

$$\Omega_p = \Omega_p(0) \ni r_0 \rightarrow r(t, r_0) \in \Omega_p(t),$$

$$r(t, r_0) = r_0 + \varepsilon \xi(t, r_0)$$

によって Lagrange 変位 ξ を導入する。

$$v_1 = \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

を (1)₁ ~ (5)₁ に代入すると,

プラズマ領域 Ω_p で

$$(1)_\xi \quad \rho_1 = -\operatorname{div}(\rho_0 \xi),$$

$$(2)_\xi \quad \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\nabla p_1 + \frac{1}{\mu_0} (\operatorname{rot} B_0 \times B_1 + \operatorname{rot} B_1 \times B_0),$$

$$(3)_\xi \quad p_1 = -(\xi, \nabla) p_0 - \gamma p_0 \operatorname{div} \xi,$$

$$(4)_{\xi} \quad B_1 = \text{rot}(\xi \times B_0) ,$$

が得られる。 $(1)_{\xi}, (3)_{\xi}, (4)_{\xi}$ の導出にあたっては、初期条件：

$$\xi(0, r_0) = 0 ,$$

を使っている。 $(4)_{\xi}$ より、 $(5)_1$ はみたされる。 $(2)_{\xi}$ の右辺を $-K\xi$ とおく。

真空領域 Ω_V での摂動解

$$B = B_0 + \epsilon B_1 , \quad E = \epsilon E_1 \quad (E_0 = 0 \text{ by (15)}) .$$

に対しては、 $(8) \sim (10)$ より

$$\text{div } B_1 = 0 , \quad \frac{\partial B_1}{\partial t} = -\text{rot } E_1 , \quad \text{rot } B_1 = 0$$

が要請される。 ここでベクトルポテンシャル α が存在して

$$B_1 = \text{rot } \alpha , \quad E_1 = -\frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

をみたと仮定する。 (10) より、

$$(10)_{\alpha} \quad \text{rot rot } \alpha = 0 \quad \text{in } \Omega_V .$$

境界 Γ では、

$$(11)_{\alpha} \quad n \times \alpha = 0 .$$

境界 Γ_p では、

$$(13)_{\xi, \alpha} \quad n \times \alpha = -(\xi, n) B_{0V} ,$$

これは、 Ohm の法則より $E_p + v \times B_p = 0$ が (13) で成立ち、さらに $E_V = -\epsilon \frac{\partial \alpha}{\partial t}$,

$v \times B_V = \epsilon \frac{\partial \xi}{\partial t} \times B_{0V}$ として得られる。 接続条件として、

$$(14)_{\xi, \alpha} \quad -\gamma p_0 \text{div } \xi + \frac{1}{\mu_0} (B_{0p}, B_{1p} + (\xi, \nabla) B_{0p}) \\ = \frac{1}{\mu_0} (B_{0V}, B_{1V} + (\xi, \nabla) B_{0V}) \quad \text{on } \Gamma_p ,$$

$$B_{1p} = \text{rot}(\xi \times B_{0p}) , \quad B_{1V} = \text{rot } \alpha .$$

これは、(14): $p + \frac{Bp^2}{2\mu_0} = \frac{B_V^2}{2\mu_0}$ において、 $p = p_0 + \varepsilon p_1$, $B_p = B_{0p} + \varepsilon B_{1p}$, $B_V = B_{0V} + \varepsilon B_{1V}$ を代入して、 ε の一次の項 $= 0$ としたものである。

かくして得られた線形系を、線形化 MHD 方程式と称する。この方程式を明示するために、以下に著者達の予稿 [11] の冒頭の部分を転記する。

1. 線形化 MHD 方程式 三次元空間内の有界領域 Ω における

理想MHD系の静止平衡状態をあらわす三つ組 $\{p, B, J\}$ を一つ固定する。

Ω の完全内部にプラズマ領域 Ω_p があり、その外側を真空領域 Ω_v が取り囲んでいる。 Ω_v の境界は、 Ω の境界 Γ と Ω_p の境界 Γ_p の和になっている。スカラー関数 p は圧力、ベクトル関数 B, J は、それぞれ、磁気誘導、電流密度、をあらわし、次の方程式系をみたしている。

$$(1) \quad \left[\begin{array}{l} \nabla p = J \times B, \operatorname{div} B = 0, \operatorname{rot} B = \mu J \text{ in } \Omega_p, \\ p = 0, \operatorname{div} B = 0, \operatorname{rot} B = 0 \text{ in } \Omega_v, \\ (B, n) = 0 \text{ on } \Gamma_p, \\ p + (B, B)/(2\mu) \text{ continuous at } \Gamma_p. \end{array} \right.$$

ここで、 μ は透磁率、 $(\ , \)$ は三次元ユークリッド内積、 n は、境界点における外向き単位法線ベクトルである。

Bernstein et. al [1] によって、この静止平衡解の近くでの理想MHD系の線形化安定性は、次の線形化MHD方程式の初期値境界値問題 (2) の解析に帰着される。

次の条件をみたす $\{\xi, \alpha\}$,

$$\xi = \xi(t, r) : [0, \infty) \times \bar{\Omega}_p \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\alpha = \alpha(t, r) : (0, \infty) \times \bar{\Omega}_V \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

を求めよ。

$$(2) \quad \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= -K\xi && \text{in } (0, \infty) \times \Omega_p, \\ \xi(0, r) &= 0 && \text{in } \Omega_p, \\ \frac{\partial \xi}{\partial t}(0, r) &= v(r) && \text{in } \Omega_p, \\ -(\xi, n)B_V &= n \times \alpha && \text{on } \Gamma_p, \\ -\gamma P_p \operatorname{div} \xi + \frac{1}{\mu} (B_p, \operatorname{rot} (\xi \times B_p) + (\xi, \nabla) B_p) \\ &= \frac{1}{\mu} (B_V, \operatorname{rot} \alpha + (\xi, \nabla) B_V) && \text{on } \Gamma_p, \\ 0 &= n \times \alpha && \text{on } \Gamma, \\ 0 &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \alpha && \text{in } (0, \infty) \times \Omega_V. \end{aligned}$$

ここで、 $\rho = \rho(r) > 0$ in Ω_p , は、静止平衡状態におけるプラ

ズマの質量密度を表わす関数であり、

$$K\xi = -\nabla\{(\xi, \nabla P) + \gamma P \operatorname{div} \xi\}$$

$$- \frac{1}{\mu} \{ \operatorname{rot} B \times \operatorname{rot} (\xi \times B) + [\operatorname{rot} \operatorname{rot} (\xi \times B)] \times B \}$$

であり、 γ は比熱比をあらわす正定数である。 B の $\Omega_p(\Omega_V)$ への

制限を $\Omega_p(\Omega_V)$ の閉包 $\bar{\Omega}_p(\bar{\Omega}_V)$ まで連続的に拡張したものを $B_p(B_V)$

であらわす。 P_p も同様に定義する。

この講演の目的は、上の問題(2) が、ヒルベルト空間

$X = \{L^2(\Omega_p)\}^3$ における二階の発展方程式の初期値問題：

$$(3) \quad \begin{cases} M \frac{d^2 \xi}{dt^2} + A\xi = 0, & t > 0, \\ \xi(0) = \xi^1, \quad \frac{d\xi}{dt}(0) = \xi^0, \end{cases}$$

において $\xi^1 = 0$, $\xi^0 = v$ としてものと見なせることを、以下にのべる仮定と適当な条件下にしめすことである。ここで、 M は関数 ρ を掛ける作用素であり、 A はある自己共役作用素である。

仮定 与えられるデータ $\Gamma, \Gamma_p, B_p, B_v, P_p$ は十分に滑らかである (それぞれ C^2 級であれば十分)。圧力 P は Ω_p で正であり、その臨界値集合 $C_p = \{r \in \Omega_p : (\nabla P)(r) = 0\}$ は、高々有数の連結成分よりなり、それぞれの成分は、" C^2 級の単純曲線"、であるか、又は、" C^2 級の曲面であってその上の各点の接平面内に B が含まれる、" かのいずれかであるとする。

我々の結果と証明のあらすじは、第一著者の報告書 [10] を参照していただきたい。

上の (3) に対応する固有値問題

$$(4) \quad A\phi = \lambda M\phi$$

の最小固有値の符号で、与えられた静止平衡解の線形化安定性を論じることになる。

文献

- [1] Bernstein, I., Frieman, E., Kruskal, M., Kulsrud, R., An energy principle for hydromagnetic stability problems, Proc. Royal Soc. A. 244 17-40 (1958).
- [2] Grad, H., Hu, P. N., Steevens, D. C., Adiabatic evolution of

- plasma equilibrium, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 72 (10), 3789-3793 (1975).
- [3] Grad, H., Survey of 1 1/2 D transport codes, U.S. Energy Research and Development Report, Plasma Physics, COO-3077-154 MF-93, (Courant Institute, New York Univ., Oct. 1978).
- [4] 仲里賢治, 菊地文雄, M H D 平衡解の数値解析について, 本講究録, 京都大学数理解析研究所.
- [5] 宮本健郎, 核融合のためのプラズマ物理, 岩波書店 (1976).
- [6] Mossino, J., Etude d'une inéquation quasi-variationnelle apparaissant en physique, Convex analysis and its application 139-157, Lecture Notes Econom. and Math. Systems, 144, (Springer, Berlin, 1977).
- [7] Sermange, M., Une méthode numérique bifurcation-application à un probleme frontière libre de la physique des plasmas, Rapport de Recherche NO. 310, (IRIA LABORIA, France, 1978).
- [8] Temam, R., A non-linear eigenvalue problem: the shape at equilibrium of a confined plasma, Arch. Rat. Mech. Anal., 60, 51-73(1976).
- [9] Teman, R., Remarks on a free boundary value problem arising in plasma physics, Comm. Partial Differential Equations, 2, 563-585(1977).
- [10] 牛島照夫, MHD 平衡における一般化微分方程式と輸送過程に関する調査, 日本原子力研究所委託研究報告書, 電気通信大学情報数理工学科 (1980).
- [11] 牛島照夫, 中村正彰, 花田孝郎, MHD 系の線形化安定性について, 日本数学会年会応用数学分科会講演予稿集 (1980年4月).

- [12] Van Kampen, N., Felderhof, B., Theoretical method in plasma physics North-Holland (1967) . 西田稔訳, プラズマ物理学, 紀伊国屋書店 (1973) .